$\forall x \in [0,1]$, $k(x) \leq 0$ d'où $\forall x \in [0,1]$, $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

2°/ • ***Continuité de f à droite en 0*** :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

• ***Dérivabilité de f à droite en 0*** :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$$

On a : $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Calculons $\lim_{x \to 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2}$

D'après 1°/, $\forall x \in [0,1]$, $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Rightarrow -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \leq -\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$$

$\lim_{x \to 0} -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ d'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et par suite

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

3°/ g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$,

$g'(x) = e^x - e^x(x+1) = -xe^x \leq 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$